CONTROLE ESTATÍSTICO DE QUALIDADE

Ralph S. Silva
http://www.im.ufrj.br/ralph/ceq.html

Departamento de Métodos Estatísticos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Março-Julho/2018

Referências: Livros

- Costa, A. F. B., Epprecht, E. K. e Carpinetti, L. C. R. (2011). *Controle Estatístico de Qualidade*, 2ª ed.
- Montgomery, D. C. (2012). *Statistical Quality Control*, 7th Ed.

Distribuição Normal

Seja X uma variável aleatória com distribuição normal com parâmetros μ e σ^2. Então, a função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma^2 > 0.$$

Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, então diremos que a distribuição é normal padrão e, em geral, utilizaremos Z para denotar esta variável aleatória e $\phi(z)$ sua função de densidade de probabilidade.

A função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(w-\mu)^2\right\} dw$$

e denotaremos por $\Phi(z)$ a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Distribuição Normal

$$\begin{aligned}
\text{Mediana}(X) &= \mu \\
\text{Moda}(X) &= \mu \\
\text{E}\,(X) &= \mu \\
\text{Var}\,(X) &= \sigma^2 \\
\psi(s) &= \exp\left\{ s\mu + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \right\} \\
\varphi(t) &= \exp\left\{ it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Denotaremos a distribuição normal com média μ e variância σ^2 por $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Distribuição Gama

Seja X uma variável aleatória com distribuição gama com parâmetros de forma α e de escala β. Então, a função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\} \mathbb{I}(x \geqslant 0), \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta > 0.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \frac{\alpha}{\beta} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\ \psi(s) &= \left(\frac{\beta}{\beta - s}\right)^\alpha \\ \varphi(t) &= \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

Denotaremos a distribuição gama com parâmetros α e β por $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$.

Se $\alpha = 1$, então $X \sim \mathcal{E}(\beta)$.

Distribuição Qui-quadrada

Seja X uma variável aleatória com distribuição qui-quadrada com (parâmetro) n graus de liberdade. Então, a função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} \exp\{-x/2\}\mathbb{I}(x \geqslant 0), \quad \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta > 0.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= n \\ \mathrm{Var}(X) &= 2n \\ \psi(s) &= (1-2s)^{-n/2} \\ \varphi(t) &= (1-2it)^{-n/2}. \end{aligned}$$

Denotaremos a distribuição qui-quadrada com n graus de liberdade por χ^2_n.

Note que $\chi^2_n \equiv \mathcal{G}(\alpha = n/2, \beta = 1/2)$.

S^2: um estimador não tendencioso para σ^2

Suponha que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ seja uma amostra aleatória simples de uma variável aleatória com distribuição normal com média μ e variância σ^2.

Considere $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ com estimador de σ^2 e $S = \sqrt{S^2}$ como estimador de σ.

Sabemos que $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \equiv \mathcal{G}\left(\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Logo, $\mathrm{E}\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{E}(S^2) = \sigma^2$.

Como já sabíamos, S^2 é um estimador não tendencioso para σ^2.

Vale ressaltar que, em geral, as amostras utilizadas nos gráficos de controle são pequenas. Por isto a preocupação com não tendenciosidade (nada de teoria para amostras grandes).

Distribuição de S^2

Agora, sejam $Y = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $V = \dfrac{\sigma^2 Y}{n-1} = S^2$.

Então,

$$\begin{aligned}
F_V(v) &= \Pr(V \leqslant v) = \Pr\left(\frac{\sigma^2 Y}{n-1} \leqslant v\right) = \Pr\left(Y \leqslant \frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right) \\
&= F_Y\left(\frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right). \\
f_V(v) &= \frac{dF_V(v)}{dv} = f_Y\left(\frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right)\frac{(n-1)}{\sigma^2} \\
&= \frac{(n-1)}{\sigma^2} \times \frac{(1/2)^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]}\left[\frac{(n-1)v}{\sigma^2}\right]^{(n-1)/2-1} \exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right] \\
&= \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} v^{(n-1)/2-1} \exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, $V \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n-1}{2\sigma^2}\right)$.

Um estimador não tendencioso para σ

Temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}(V^{1/2}) = \int_0^\infty v^{1/2} f_V(v)dv \\
&= \int_0^\infty v^{1/2} \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} v^{(n-1)/2-1} \exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right] dv \\
&= \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} \int_0^\infty v^{n/2-1} exp\left[-\frac{(n-1)v}{2\sigma^2}\right] dv \\
&= \frac{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n-1)/2]} \times \frac{\Gamma[n/2]}{[(n-1)/(2\sigma^2)]^{n/2}} \\
&= \frac{\sigma\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Defina $c_4 = \dfrac{\Gamma[n/2]}{\Gamma[(n-1)/2]} \left(\dfrac{2}{n-1}\right)^{1/2}$.

Assim, $\mathrm{E}\left(\dfrac{S}{c_4}\right) = \sigma$. Portanto, $\dfrac{S}{c_4}$ é um estimador não tendencioso para σ.

Distribuição conjunta do máximo e do mínimo

Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória simples de uma variável aleatória com função de distribuição acumulada F_X. Defina $U = X_{(1)} = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ e $V = X_{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. A função de distribuição acumulada conjunta de U e V é dada por $F_{U,V}(u, v) = [F_X(v)]^n - [F_X(v) - F_X(u)]^n$.

$$
\begin{aligned}
F_{U,V}(u,v) &= \Pr(U \leqslant u; V \leqslant v) = \Pr\left(X_{(1)} \leqslant u; X_{(n)} \leqslant v\right) \\
&= \Pr\left(X_{(1)} \leqslant \infty; X_{(n)} \leqslant v\right) - \Pr\left(X_{(1)} > u; X_{(n)} \leqslant v\right) \\
&= \Pr(X_1 \leqslant v; \ldots; X_n \leqslant v) - \Pr(u < X_1 \leqslant v; \ldots; u < X_n \leqslant v) \\
&\qquad \text{(independência)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i \leqslant v) - \prod_{i=1}^{n} [\Pr(X_i \leqslant v) - \Pr(X_i \leqslant u)] \\
&\qquad \text{(identicamente distribuídas)} \\
&= [F_X(v)]^n - [F_X(v) - F_X(u)]^n, \quad \text{para} \quad u \leqslant v.
\end{aligned}
$$

- Se X_i for contínua, então
$f_{U,V}(u,v) = n(n-1) f_X(v)\, f_X(u) \left[F_X(v) - F_X(u)\right]^{n-2}, \quad \text{para} \quad u \leqslant v.$

  Prova: Basta derivar a distribuição conjunta com respeito a u e v.

- As distribuições marginais de $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são $F_U(u) = 1 - [1 - F_X(u)]^n$ e $F_V(v) = [F_X(v)]^n$.

  Prova: Basta tomar os limites de $u \to \infty$ ou $v \to \infty$ na função de distribuição acumulada conjunta de U e V para se obter as marginal de V e U, respectivamente.

- Se X_i for contínua, então $f_U(u) = nf_X(u)\,[1 - F_X(u)]^{n-1}$ e $f_V(v) = nf_X(v)\,[F_X(v)]^{n-1}$.

  Prova: Basta derivar as funções de distribuição acumulada marginais dada no Item anterior.

Função de distribuição da amplitude

Defina as seguintes variáveis aleatórias: $U = X_{(1)}$, $V = X_{(n)}$ e $R = V - U$.

É fácil verificar que R é uma variável aleatória com suporte $(0, \infty)$.

Segue-se que

$$
\begin{aligned}
F_R(r) &= \Pr(R \leqslant r) = \Pr(V - U \leqslant r) = \Pr(V \leqslant U + r) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{u}^{u+r} f_{U,V}(u, v) dvdu = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{u}^{u+r} f_{V|U}(v|u) f_U(u) dvdu \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{u}^{u+r} f_{V|U}(v|u) dv \right] f_U(u) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [F_{V|U}(u + r|u) - F_{V|U}(u|u)] f_U(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_{V|U}(u + r|u) f_U(u) du, \quad \text{pois} \quad F_{V|U}(u|u) = 0.
\end{aligned}
$$

Lembre-se que para u fixo, $v \geqslant u$.

Função de densidade de probabilidade da amplitude

$$
\begin{aligned}
f_R(r) &= \frac{dF_R(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\int_{-\infty}^{\infty} F_{V|U}(u+r|u)f_U(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dr}F_{V|U}(u+r|u)f_U(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_{V|U}(u+r|u)f_U(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,u+r)du \\
&= n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\, f_X(u+r)\left[F_X(u+r)-F_X(u)\right]^{n-2}du.
\end{aligned}
$$

Para o caso que $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, e fazendo a mudança de variável $z = \dfrac{u-\mu}{\sigma}$, temos que

$$
f_R(r) = \frac{n(n-1)}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\phi(z+r/\sigma)\left[\Phi(z+r/\sigma)-\Phi(z)\right]^{n-2}dz.
$$

sendo ϕ e Φ como as funções definidas anteriormente.

Função de densidade de probabilidade da amplitude relativa

Defina $W = \dfrac{R}{\sigma}$ como a amplitude relativa.

Temos que $F_W(w) = \Pr(W \leqslant w) = \Pr(R \leqslant w\sigma) = F_R(w\sigma)$.

Assim,
$$f_W(w) = f_R(w\sigma)\sigma = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\phi(z+w)[\Phi(z+w) - \Phi(z)]^{n-2}dz.$$

Segue-se que $\mathrm{E}(W) = \dfrac{1}{\sigma}\mathrm{E}(R) \Leftrightarrow \mathrm{E}(R) = E(W)\sigma$.

Defina $d_2 = \mathrm{E}(W)$ e $d_3 = DP(W) = \sqrt{\mathrm{Var}(W)} = \sqrt{\sigma_W^2}$.

As integrais são resolvidas de forma numérica e os resultados apresentados em uma tabela.

Note que $d_2 = \mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(Z_{(n)}) - \mathrm{E}(Z_{(1)})$ sendo $Z_{(n)}$ e $Z_{(1)}$ o máximo e o mínimo, respectivamente, de uma amostra de uma variável aleatória Z padronizada. Se Z tiver distribuição simétrica, então $\mathrm{E}(Z_{(n)}) = -\mathrm{E}(Z_{(1)})$ e $\mathrm{Var}(Z_{(n)}) = \mathrm{Var}(Z_{(1)})$.