Controle Estatístico de Qualidade

Ralph S. Silva
http://www.im.ufrj.br/ralph/ceq.html

Departamento Métodos Estatísticos
Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Março-Julho/2018

Sumário

Construindo os Gráficos de Controle de $\overline{X}$ e R

- Concentrar em controle de variáveis do tipo contínua.
- Monitorar a centralidade e a dispersão destas variáveis.
- Em geral, monitora-se $\overline{X}$ como centralidade e R como dispersão.

Para o gráfico de $\overline{X}$, temos

- A linha média $LM_{\overline{X}}$ é localizada no valor esperado de $\overline{X}$.
- O limite inferior de controle $LIC_{\overline{X}}$ e o limite superior de controle $LSC_{\overline{X}}$ são geralmente estabelecidos a três desvios padrões da média.

$$\begin{aligned} LSC_{\overline{X}} &= \mu_{\overline{X}} + 3\sigma_{\overline{X}} \\ LM_{\overline{X}} &= \mu_{\overline{X}} \\ LIC_{\overline{X}} &= \mu_{\overline{X}} - 3\sigma_{\overline{X}}. \end{aligned}$$

Se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar sua variabilidade.

Supondo que a amostra seja aleatória simples (independentes e identicamente distribuídos; iid), temos:

- $\mu_{\overline{X}} = \mu_X = \mu$ (identicamente distribuídos); e
- $\sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (iid).

Para determinar os limites de controle, precisamos saber μ e σ para o processo em controle.

Denotaremos μ_0 e σ_0 os valores quando o processo está em controle.

Na prática, desconhecemos estes valores e os estimaremos por $\widehat{\mu}_0$ e $\widehat{\sigma}_0$.

Assim, temos os limites de controle estimados por:

$$\begin{aligned} LSC_{\overline{X}} &= \widehat{\mu}_0 + 3\frac{\widehat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \\ LM_{\overline{X}} &= \widehat{\mu}_0 \\ LIC_{\overline{X}} &= \widehat{\mu}_0 - 3\frac{\widehat{\sigma}_0}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Para monitorar a dispesão com o gráfico de R, temos

$$\begin{aligned} LSC_R &= \mu_R + 3\sigma_R \\ LM_R &= \mu_R \\ LIC_R &= \mu_R - 3\sigma_R. \end{aligned}$$

Se supormos normalidade da distribuição dos dados, então

$$\mu_R = d_2\sigma \qquad \text{e} \qquad \sigma_R = d_3\sigma.$$

sendo que d_2 e d_3 só dependem do tamanho da amostra.

Podemos estimar σ utilizando $\widehat{\sigma}_0$ com o processo em controle.

Assim, estimamos os limites de controle por

$$\begin{aligned} LSC_R &= d_2\widehat{\sigma}_0 + 3d_3\widehat{\sigma}_0 \\ LM_R &= d_2\widehat{\sigma}_0 \\ LIC_R &= d_2\widehat{\sigma}_0 - 3d_3\widehat{\sigma}_0. \end{aligned}$$

Lembrando que $LIC_R \geqslant 0$.

Dado um conjunto inicial de m amostras, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}_0 &= \overline{\overline{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{X}_i \quad \text{e} \quad \overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{ij} \quad \text{(média da } i\text{-ésima amostra)} \\
\widehat{\sigma}_0 &= S_D = \frac{\overline{R}}{d_2} \\
\overline{R} &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}R_i \quad \text{e} \quad R_i = \max_{1\leqslant j\leqslant n} X_{ij} - \min_{1\leqslant j\leqslant n} X_{ij} \quad \text{(amplitude da } i\text{-ésima amostra).}
\end{aligned}$$

Podemos reescrever os limites de controle e a linha média estimados como:

$$\begin{aligned}
LSC_R &= d_2\widehat{\sigma}_0 + 3d_3\widehat{\sigma}_0 = \overline{R} + 3\frac{d_3}{d_2}\overline{R} = \overline{R}\left(1 + 3\frac{d_3}{d_2}\right) \\
LM_R &= d_2\widehat{\sigma}_0 = \overline{R} \\
LIC_R &= d_2\widehat{\sigma}_0 - 3d_3\widehat{\sigma}_0 = \overline{R} - 3\frac{d_3}{d_2}\overline{R} = \overline{R}\left(1 - 3\frac{d_3}{d_2}\right).
\end{aligned}$$

Exemplo

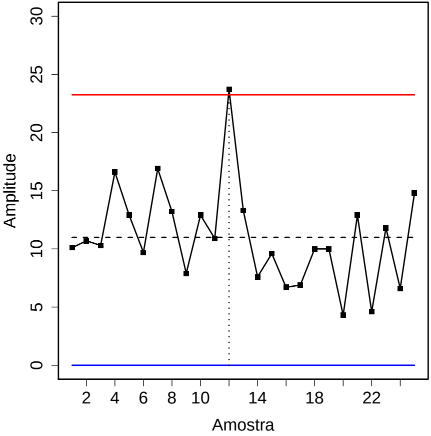
Veja os dados da Tabela 3.2 no arquivo Tabela-3-2.xls

Começamos com os limites de controle da amplitude.

Da tabela, temos $\overline{R} = 11,0$. Assim,

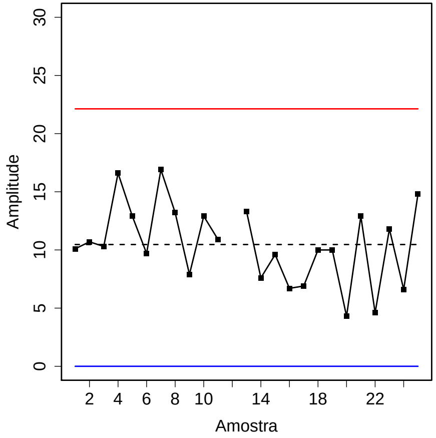
$$\begin{aligned} LSC_R &= 11,0\left(1 + 3\frac{0,864}{2,326}\right) = 11,0 \times 2,1144 = 23,26 \\ LM_R &= 11,0 \\ LIC_R &= 11,0\left(1 + 3\frac{0,864}{2,326}\right) = 11,0 \times (-0,1144) = -1,26. \end{aligned}$$

Como o valor de $LIC_R < 0$, tomamos $LIC_R = 0$.



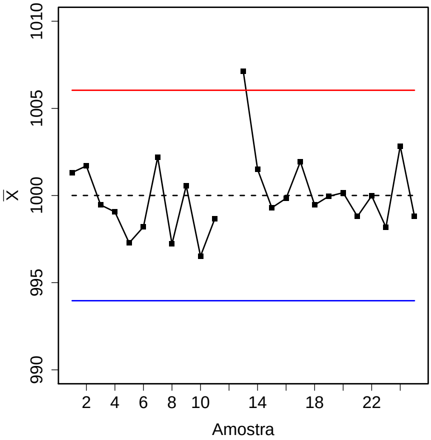
A amostra 12 está com uma dispersão incomum e deve ser investigada.

Eliminando a amostra 12, obtemos $LSC_R = 22,13$, $LM_R = 10,47$ e $LIC_R = 0$:



Para a média do processo (eliminando a amostra 12), temos

$$\widehat{\sigma}_0 = 4,50, \quad LSC_{\overline{X}} = 1006,0, \quad , LM_{\overline{X}} = 1000,0 \quad \text{e} \quad LIC_{\overline{X}} = 993,9.$$



Temos problema com a amostra 13 também.

Eliminando a amostra 12 e 13, obtemos

$$\widehat{\sigma}_0 = 4,45, \quad LSC_{\overline{X}} = 1005,7, \quad , LM_{\overline{X}} = 999,7 \quad \text{e} \quad LIC_{\overline{X}} = 993,7.$$